Deckblatt zur Facharbeit

Wie viel passt in ein Weizenbierglas?

Die Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

Facharbeit in Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung:

Das Thema dieser Facharbeit lautet „Wie viel passt in ein Weizenbierglas? Die Berechnung des Volumens von Rotationskörpern“.

Die Facharbeit beschäftigt sich also erst einmal mit dem Begriff Rotationskörper und daraufhin mit der allgemeinen Berechnung des Volumens von Rotationskörpern, wobei vorweg an dem Beispiel der „Keplerschen Fassregel“ verdeutlicht werden soll, wie man Volumina von Rotationskörpern berechnen kann, ohne integrieren zu müssen. Nachdem ein Beispiel für Rotationskörper gegeben wurde und dessen Volumen berechnet wurde, geht es im zweiten Teil der Facharbeit darum, das Volumen eines ausgewählten Weizenbierglases zu berechnen. Hierzu wird das Glas als erstes vermessen. Daraufhin wird eine Formel bestimmt, welche die Form des Weizenglases beschreibt, das um 90° nach rechts gekippt auf ein Koordinatensystem gelegt wurde. Das Volumen wird nun berechnet und mit dem gemessenen Volumen verglichen.

1.1 Was sind Rotationskörper ?

Laut Definition sind Rotationskörper Körper, „die durch Rotation einer in einer Ebene liegenden erzeugenden Fläche um eine in derselben Ebene liegende, aber die Fläche nicht schneidende Achse gebildet werden“ **[1]**.

In dieser Facharbeit wird die Fläche als Rotationsfläche bezeichnet, die von der x-Achse und einer integrierbaren Funktion f im Intervall [a,b] begrenzt wird. Die Funktionswerte f(x) müssen weiterhin im Intervall [a,b] größer oder gleich Null sein. Als Ebene wird in dieser Facharbeit die von x- und y-Achse gespannte Ebene betrachtet. (siehe Abb1)

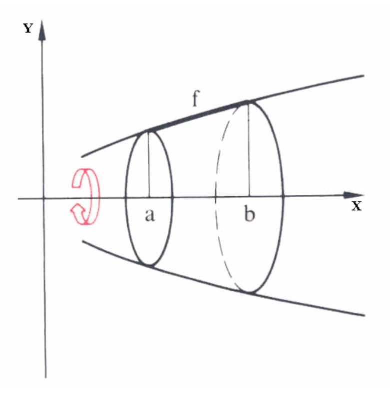
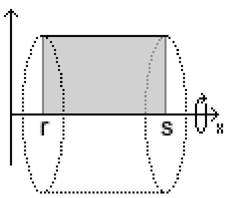


Abb1 **[3 (S.53)]**

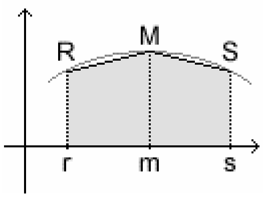
1.2 Die Keplersche Fassregel:

Mit der Keplerschen Fassregel, die nach Johannes Kepler (1571 – 1630), einem württembergischen Astronom und Mathematiker, benannt wurde, lässt sich auf einfache Weise das Volumen eines Rundfasses berechnen, ohne dass man eine Funktion integrieren muss.

Johannes Kepler hat das Fass, dessen Volumen er berechnen wollte zunächst um 90° gedreht und auf ein Koordinatensystem gelegt, sodass die Mitte des Fasses die x-Achse ist. Den Anfangspunkt des Fasses bezeichnet man zunächst mit r, den Endpunkt mit s. Die Länge der Strecke $\overline{rs}$ ist somit die Höhe h des Fasses. Kepler betrachtete zunächst an Stelle eines Rundfasses eine Tonne mit einer geraden Seite, die sich mit einer Konstanten f beschreiben lässt, dessen Volumen somit V = $\pi * (f(s))^2 * h$ ist. Das Volumen erhält man also, wenn man ein Rechteck, dessen untere Seite die x-Achse und dessen obere Seite die Strecke $\overline{rs}$ ist, um die x-Achse rotieren lässt. Es entsteht ein Rotationskörper und die Keplersche Fassregel gibt die Volumina solcher Körper an.



Nun ergibt sich das Problem, dass ein Rundfass einen gewölbten Bauch anstelle von einer geraden Seite hat, der sich zwar mit einer Funktion f beschreiben lässt, aber von dem nur die Höhe f(x) an einem bestimmten Punkt x errechnet werden kann.
Das Fass wird also zunächst in zwei Abschnitte unterteilt. Idealerweise wird das Fass in der Mitte geteilt. Der Punkt in der Mitte wird mit m bezeichnet. Somit ist der Radius des Fasses an dieser Stelle f(m). Der Punkt an dieser Stelle wird nun mit M bezeichnet und die Punkte R = f(r) und M sowie M und S = f(s) werden miteinander verbunden um den Bogen des Fasses grob schematisch nachzuzeichnen. Die Höhe des Fasses ist somit h = $\overline{RS}$



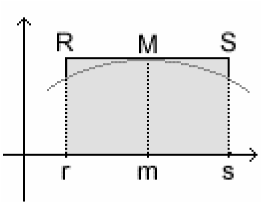
Jetzt lässt sich die Rotationsfläche einfach errechnen, wobei sie an Genauigkeit verliert.
Es werden zwei Trapeze gebildet, die den Flächeninhalt

$A_{rm} = \frac{h}{2} * \frac{(f(r) + f(m))}{2}$ bzw. $A_{ms} = \frac{h}{2} * \frac{(f(m) + f(s))}{2}$ haben.

Beide Flächeninhalte zusammen ergeben die Rotationsfläche:

$$A_1 = A_{rm} + A_{ms} = \frac{h * (f(r) + 2 * f(m) + f(s))}{4}$$

Da die Rotationsfläche jedoch etwas zu klein geraten ist, hat Kepler die Rotationsfläche eines Rechtecks A_2 der Länge $\overline{RS}$ und der Höhe f(m) berechnet.



Kepler hat einen Durchschnittswert der Flächen errechnet, wobei er die Fläche A_1, die aus den beiden Trapezen entstanden ist, zweifach gewertet hat und das Rechteck nur einfach, weil die Trapezflächen um ein zweifaches genauer sind, da sie in zwei Abschnitte unterteilt wurden.

Es ergibt sich folgender Inhalt für die Rotationsfläche A:

$$A = \frac{2 * A_1 + A_2}{3} = \frac{\frac{h * (f(r) + 2 * f(m) + f(s))}{2} + h * f(m)}{3} = \frac{h * (f(r) + 4 * f(m) + f(s))}{6}$$

Diese Näherungsformel ist die Keplersche Fassregel.

Dies ist jedoch nur der Flächeninhalt der halben Querschnittsfläche des Fasses und nicht das Volumen.

Um das Volumen nach Kepler zu errechnen geht man ähnlich vor. Man errechnet das Volumen V_1, das entsteht, wenn man die beiden Trapeze um die x-Achse rotieren lässt, und das Volumen V_2, das entsteht, wenn man das Rechteck um die x-Achse rotieren lässt.

Man bildet wieder ein Durchschnittsvolumen, wobei man V_1 wieder 2-fach wertet und V_2 1-fach, da V_1 wegen der Unterteilung in zwei Abschnitte um ein zweifaches genauer ist.

Man benötigt die Formel für einen Zylinder V_2, die bekanntlich V = $\pi * r^2 * h$ ist und die Formel für einen Kegelstumpf, die bekanntlich V = $\frac{\pi * \left(r_1^{\,2} + r_1 * r_2 + r_2^{\,2}\right) * h}{3}$ ist. (siehe ABB2)

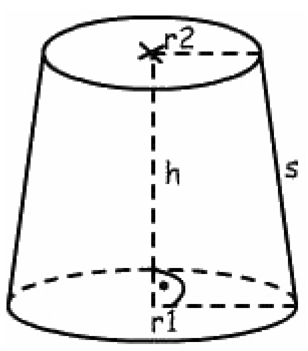
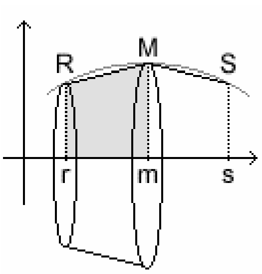


ABB2

Daraus ergibt sich:

$$V_{rm} = \frac{\pi * \left(f(r)^2 + f(r) * f(m) + f(m)^2 \right) * h}{6}$$ bzw.

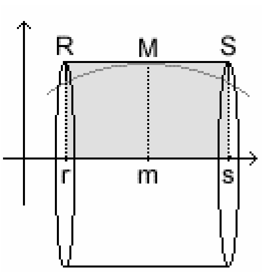
$$V_{ms} = \frac{\pi * \left(f(m)^2 + f(m) * f(s) + f(s)^2 \right) * h}{6}$$



$$V_1 = V_{rm} + V_{ms} = \frac{\pi * \left(f(r)^2 + 2 * f(m)^2 + f(s)^2 + f(r) * f(m) + f(m) * f(s) \right) * h}{6}$$

und

$$V_2 = \pi * f(m)^2 * h$$



Die beiden Näherungen in der Wertung 2:1 miteinander verrechnet ergeben:

$$V = \frac{2*V_1 + V_2}{3} = \pi * h * \frac{f(r)^2 + 5f(m)^2 + f(s)^2 + f(r)*f(m) + f(m)*f(s)}{9}$$

[2]

2. Das Volumen von Rotationskörpern

2.1 Herleitung der allg. Formel zur Berechnung von Rotationskörpern:

Der Grundgedanke bei der Herleitung der Formel ist ähnlich, wie der Gedanke bei der Integralrechnung, bei der man den Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer stetigen Funktion und der x-Achse im Intervall [a, b] berechnet. Das Intervall [a, b] wird in mehrere gleich lange Teilintervalle eingeteilt und die einbeschriebenen und umbeschriebenen Treppenfiguren aus Rechtecken werden betrachtet.
Zur Herleitung der Formel für das Volumen eines Körpers, der entsteht, wenn eine stetige Funktion f im Intervall [a, b] um die x-Achse rotiert, ist es hilfreich, das Intervall ebenfalls in mehrere Teilintervalle einzuteilen. Die einbeschriebenen sowie die umbeschriebenen Rechtecke, die entstehen, bilden einbeschriebene und umbeschriebene Treppenkörper aus Zylindern, wenn sie um die x-Achse rotieren.

Betrachten wir nun eine integrierbare Funktion f(x) im Intervall [a,b].
Unterteilen wir das Intervall [a,b] nun in n gleich lange Teilintervalle. Die Teilpunkte seien:

a = $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n$ = b

Sei nun E_n die Summe der Volumina der einbeschriebenen Zylinder und S_n die Summe der umbeschriebenen, dann gilt für das Volumen V:

$E_n \leq$ V $\leq S_n$

Wenn n die Anzahl der Teilintervalle ist und immer größer wird, nähern sich E_n und S_n immer mehr dem Volumen V an.

Die Breite der Teilintervalle sei Δx. Die kleinsten Funktionswerte f(x) in den Teilintervallen seien, m_1, m_2, ..., m_n, die größten M_1, M_2, ..., M_n.

Diese Werte sind somit die Radien der Zylinder, während Δx jeweils die Höhe der Zylinder ist. (siehe Abb3)

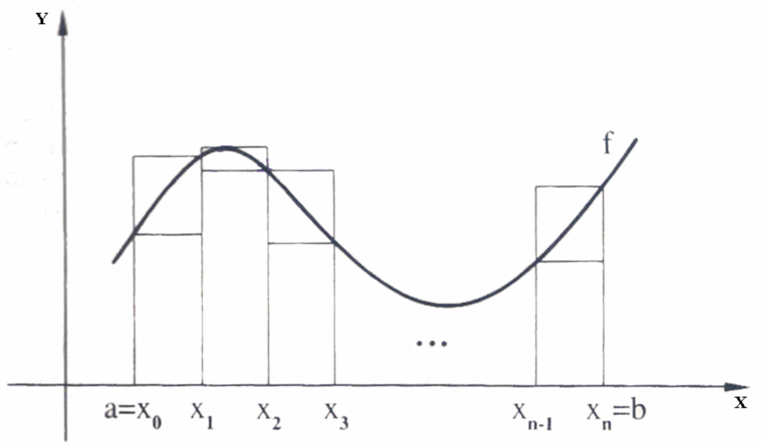


Abb3 **[3 (S.52)]**

Die Volumen der einbeschriebenen Zylinder sind also:

$\pi * m_1{}^2 * \Delta x$, $\pi * m_2{}^2 * \Delta x$, ..., $\pi * m_n{}^2 * \Delta x$

Die der umbeschriebenen:

$\pi * M_1{}^2 * \Delta x$, $\pi * M_2{}^2 * \Delta x$, ..., $\pi * M_n{}^2 * \Delta x$

Die Summe der einbeschriebenen Zylinder hat also das Volumen:

$E_n = \pi * m_1{}^2 * \Delta x + \pi * m_2{}^2 * \Delta x + ... + \pi * m_n{}^2 * \Delta x$

Die Summer der umbeschriebenen:

$S_n = \pi * M_1{}^2 * \Delta x + \pi * M_2{}^2 * \Delta x + ... + \pi * M_n{}^2 * \Delta x$

n wird unendlich groß und somit Δx unendlich klein. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ wird gebildet.

E_n ist nun die Untersumme der Funktion $\pi * \left(f(x)\right)^2$, S_n die Obersumme. Und weil f(x) stetig ist, ist auch $\pi * \left(f(x)\right)^2$ stetig und somit integrierbar und da $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ist, weil $E_n \leq \mathrm{V} \leq S_n$ ist, ist das gesuchte Volumen $\mathrm{V} = \pi \int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$.

Mit dieser Funktion kann weitergerechnet werden, wenn für f ein konkreter Funktionsterm vorliegt.

[3 (52 f.)]

2.2. Anwendungsbeispiel

2.2.1 Volumen einer Kugel:

Auch eine Kugel ist ein Rotationskörper und man kann die Formel zur Berechnung des Volumens der Kugel mit Hilfe der allgemeinen Formel zur Volumenberechnung von Rotationskörpern herleiten.

Die entstehende Figur sollte das Volumen V = $\frac{4}{3}\pi * r^3$ haben.

Man benötigt die Funktion, die einen Halbkreis auf der x-Achse abbildet, dessen Durchmesser auf der x-Achse liegt und dessen Mittelpunkt der Ursprung ist. Die Funktionsgleichung lautet:

f(x) = $\sqrt{r^2 - x^2}$

Um nun das Volumen der Kugel zu berechnen, wendet man die Formel für das Volumen von Rotationskörpern V = $\pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ an.

Es ergibt sich:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx$$

Die Stammfunktion von f(x) = $r^2 - x^2$ lautet: F(x) = $r^2x - \frac{1}{3}x^3$; daraus ergibt sich also:

$$V = \pi * \left[r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r}$$

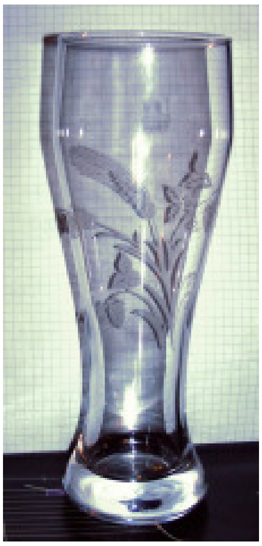
$$V = \pi * \left(\left(r^3 - \tfrac{1}{3} r^3 \right) - \left((-r)^3 + \tfrac{1}{3} (-r)^3 \right) \right)$$

$$V = \pi * \left(\tfrac{2}{3} r^3 - \left(-\tfrac{2}{3} r^3 \right) \right)$$

Hieraus ergibt sich folgende Formel, die mit der schon bekannten Formel, zur Volumenberechnung einer Kugel übereinstimmt.

$$V = \pi * \tfrac{4}{3} * r^3$$

3. Das Weizenbierglas



3.1 Abmessen des Weizenbierglases:

Um das Volumen des Weizenbierglases zu errechnen, muss man dieses erst genau vermessen.

Zuerst misst man die Höhe des Glases. Diese beträgt 23,3 cm. Als nächstes stellt man ein Lineal auf den Boden des Glases und misst bis zur oberen Kante des Glases 21,5 cm. Es ergibt sich, dass der Glassockel 1,8 cm hoch ist. Der Abstand zwischen der oberen Glaskante und der 0,5 Liter Marke beträgt 3,35 cm.

Der zu berechnende Bereich des Glases ich also 18,15 cm hoch (23,3 cm – 1,8 cm – 3,35 cm = 18,15 cm) (siehe Abb4).

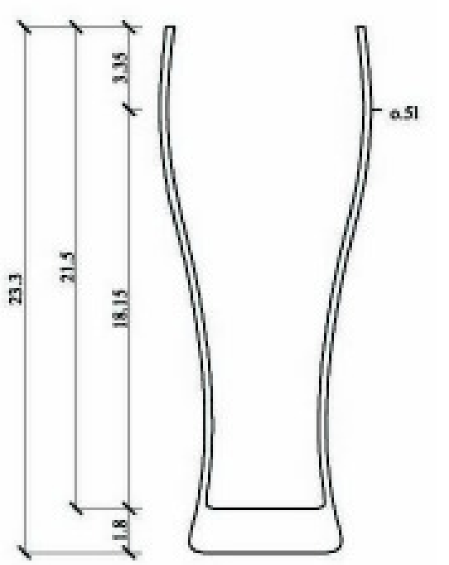


Abb4

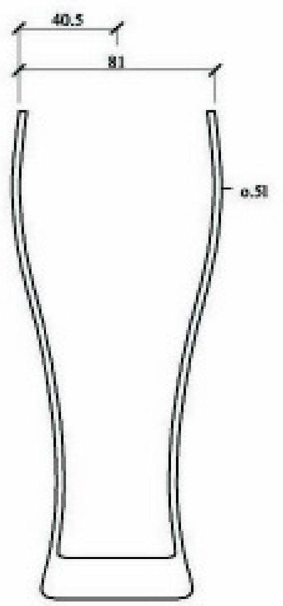


Abb5

Im nächsten Schritt misst man den äußeren Durchmesser an der oberen Kante des Glases mit einer Schiebleere. Dieser beträgt 8,1 cm. Das Glas hat also an der oberen Kante den Radius 4,05 cm (siehe Abb5).

Als nächstes fällt man ein Lot, welches das Glas an der Stelle berührt, an der es die größte Wölbung nach außen hat. An der oberen Kante des Glases ist der Abstand zwischen Lotfaden und Glas 0,3 cm.

Der äußere Radius beträgt also an der Stelle, an der die Wölbung des Glases am größten ist 4,35 cm (4,05 cm + 0,3 cm = 4,35 cm) (siehe Abb6).

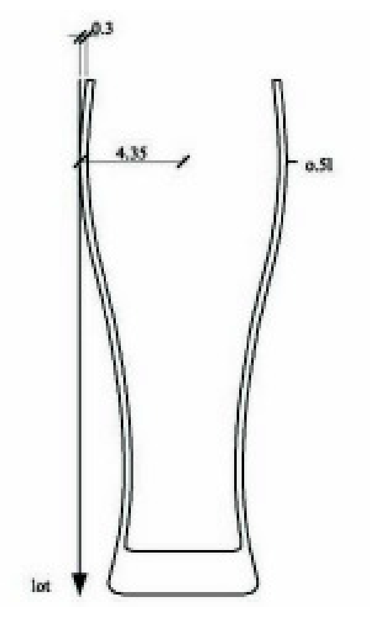


Abb6

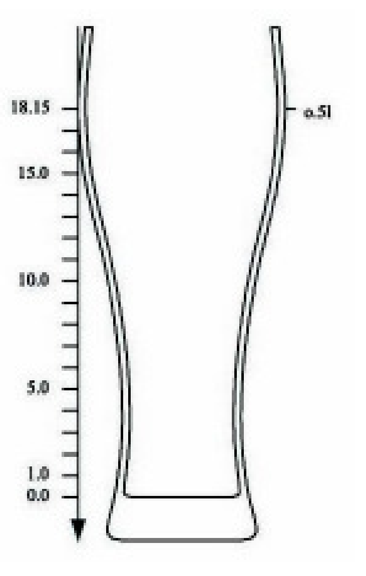


Abb7

Nun misst man von unten in einer Höhe von 1,8 cm beginnend (also dort beginnend, wo der Glassockel zu Ende ist und wo der zu berechnende Bereich beginnt) den Abstand zwischen Lotfaden und Glas zentimeterweise. Der Wert in 1,8 cm Höhe wird mit Null bezeichnet, einen Zentimeter höher wird der Wert mit eins bezeichnet, bis der letzte Wert in einer Höhe von 18,15 cm gemessen wird. (siehe Abb7)

Der gemessene Wert wird jeweils von dem Radius 4,35 cm (der Radius an der Stelle, an der das Glas die größte Wölbung nach außen hat) abgezogen. Somit hat man den Radius des Glases an den jeweiligen Punkten errechnet.

Nun muss von dem errechneten Radius die Dicke des Glases an der jeweiligen Stelle abgezogen werden, um den inneren Radius zu erhalten.

Die Dicke des Glases an der jeweiligen Stelle wird mit einem Dickenmessgerät (siehe Abb8) gemessen.

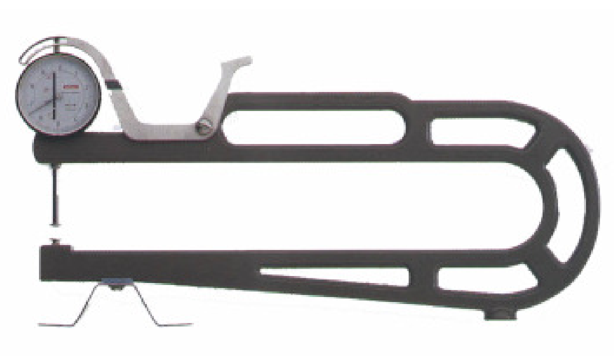


Abb8

Es ergeben sich folgende Werte:

Messstelle	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	18,15
Größter Radius in cm	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35	4,35
Abstand zw. Lot u. Glas in cm	1,01	1,35	1,59	1,74	1,84	1,87	1,85	1,8	1,71	1,57	1,42	1,24	1,02	0,78	0,53	0,32	0,17	0,08	0,01	0
Radius in cm	3,34	3	2,76	2,61	2,51	2,48	2,5	2,55	2,64	2,78	2,93	3,11	3,33	3,57	3,82	4,03	4,18	4,27	4,34	4,35
Wanddicke in cm	-	0,54	0,47	0,44	0,42	0,41	0,36	0,28	0,26	0,23	0,21	0,2	0,18	0,18	0,15	0,15	0,14	0,15	0,17	0,17
Innerer Radius in cm	-	2,46	2,29	2,17	2,09	2,07	2,14	2,27	2,38	2,55	2,72	2,99	3,15	3,39	3,67	3,88	4,04	4,12	4,17	4,18

Bei der Tabelle ist zu beachten, dass die Wanddicke am Punkt Null nicht genau gemessen werden kann.

Wenn man nun ein Koordinatensystem anlegt und als x-Werte die Werte der Messstelle einträgt und als y-Werte den inneren Radius, so liegen die Punkte auf einer Kurve, welche die Form des Weizenbierglases um 90° nach rechts gekippt auf ein Koordinatensystem gelegt beschreibt.

Eine Funktion für die Kurve gilt es nun im nächsten Schritt zu bestimmen.

3.2 Herleitung der Formel, welche die Form eines Weizenbierglases beschreibt:

Zum bestimmen der Funktion wird zunächst eine Polynomfunktion dritten Gerades gewählt:

$f(x) = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d$

Da die Funktion 4 Unbekannte hat, sucht man sich 4 Punkte (P,Q,R,S) aus und löst jeweils nach a, b, c und d auf.

P(1/2,46)

Q(5/2,07)

R(11/2,99)

S(18/4,17)

Damit ergibt sich für P(1/2,46) folgende Gleichung:

$2{,}46 = a + b + c + d$

Somit ergibt sich für die Variable d:

$d = 2{,}46 - a - b - c$

Für Q(5/2,07) ergibt sich folgende Gleichung:

$2{,}07 = 125*a + 25*b + 5*c + 2{,}46 - a - b - c$

Für die Variable c ergibt sich also:

$$c = -31*a - 6*b - \frac{39}{400}$$

Für R(11/2,99) ergibt sich folgende Gleichung:

$$2{,}99 = 1331*a + 121*b + 11*(-31*a - 6*b - \frac{39}{400}) + 2{,}46 - a - b - (-31*a - 6*b - \frac{39}{400})$$

Die Variable b ist also:

$$b = -17*a + \frac{301}{12000}$$

Für S(18/4,17) lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$4{,}17 = 5832*a + 324*(-17*a + \frac{301}{12000}) + 18*(-31*a - 6*(-17*a + \frac{301}{12000}) - \frac{39}{400}) + 2{,}46 - a$$

$$+\ 17*a - \frac{301}{12000} + 31*a + 6*(-17*a + \frac{301}{12000}) + \frac{39}{400}$$

Damit ergibt sich für die Variable a:

a = –0,0014

Diesen Wert kann man anschließend in die Gleichung für die Variable b einsetzen und man bekommt:

b = 0,0489

Die Werte für a und b lassen sich in die Gleichung für die Variable c einsetzen und man erhält:

c = –0,3478

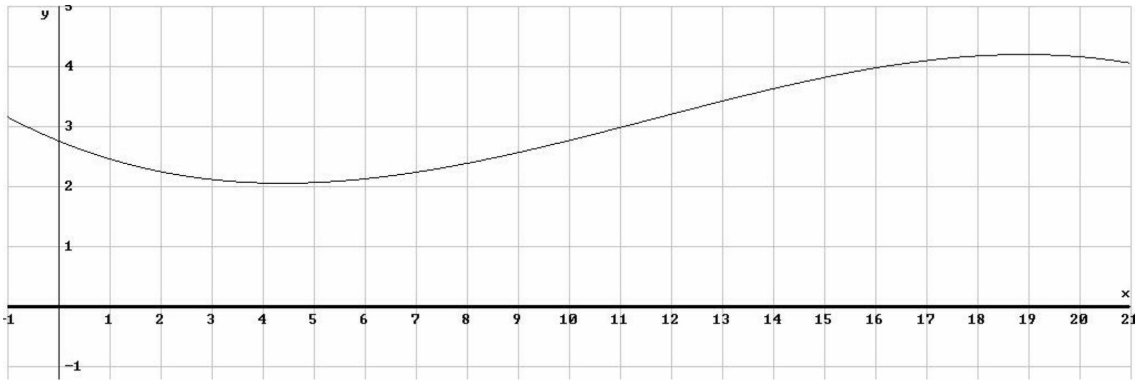
Wenn man nun die Werte für a, b und c in die Gleichung für die Variable d einsetzt, so erhält man:

d = 2,7602

Es entsteht folgende Gleichung:

$f(x) = -0{,}0014 \cdot x^3 + 0{,}0489 \cdot x^2 - 0{,}3478 \cdot x + 2{,}7602$

Der Graph der Funktion sieht folgendermaßen aus:



Man kann feststellen, dass alle Punkte auf dem Graphen oder unmittelbar daneben liegen. Es lässt sich also mit der Funktion weiterrechnen und das Volumen des Weizenbierglases bestimmen.

3.3 Berechnung des Volumens des Weizenbierglases:

Mit der Formel zu Volumenberechnung von Rotationskörpern (V = $\pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$) lässt sich nun das Volumen des Weizenbierglases bestimmen, wenn $f(x) = -0{,}0014 \cdot x^3 + 0{,}0489 \cdot x^2 - 0{,}3478 \cdot x + 2{,}7602$ ist und man das Intervall von 0 bis 18,15 betrachtet:

$$V = \pi * \int_{0}^{18,15} (-0{,}0014*x^3 + 0{,}0489*x^2 - 0{,}3478*x + 2{,}7602)^2 \, dx$$

Daraus ergibt sich:

$$V = \pi * [\,0{,}00000196x^6 - 0{,}00013692x^5 + 0{,}00336506x^4 - 0{,}0417434x^3$$
$$+0{,}3909124x^2 - 1{,}91999512x + 7{,}61870404\,]_0^{18,15}$$

$$V = \pi * 160{,}10192$$

$$V = 502{,}9750$$

Das Volumen des Weizenbierglases beträgt also laut der Rechnung 502,9750 cm³ also 502,9750 ml oder 0,5029750 Liter.

3.4 Probleme bei der Berechnung des Weizenbierglases:

Das errechnete Volumen des Weizenbierglases beträgt gerundet 0,503 Liter. Dieser Wert ist sehr genau am tatsächlich gemessenen Volumen welches 0,5 Liter beträgt. Es gibt jedoch eine geringe Abweichung.
Die Abweichung lässt sich durch ungenaues Vermessen des Weizenbierglases erklären. Insbesondere knapp über dem Glassockel ist es schwierig, die Wanddicke des Glases zu vermessen und deswegen kann hier auch kein genauer Wert ermittelt werden.
Weiterhin ist die Funktionsgleichung, welche die Form des Weizenbierglases beschreibt nicht ideal.
Insgesamt ist das Ergebnis jedoch zufriedenstellend.
Prost!

4. **Literaturverzeichnis:**

[1] www.wissen.de (Suchbegriff: Rotationskörper; 18.02.2004) (siehe Anhang)

[2] http://sneaker.cfg-hockenheim.de/referate/inhalt/fassvolumen/seiten/kepler-h.html (siehe Anhang)

[3] Mathematik heute | Einführung in die Analysis 2 | Leistungskurs
Schroedel Schulbuchverlag
Verlag Ferdinand Schöningh
Herausgeber: Heinz Griesel, Helmut Postel