

# Deckblatt zur Facharbeit

Wie dick ist Frischhaltefolie?

Die archimedische Spirale

Facharbeit in Mathematik

Torsten Hollmann

Februar/März 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Polarkoordinaten</b>	<b>1</b>
2.1	Allgemeine Definition . . . . .	1
2.2	Vom kartesischen Koordinatensystem zu den Polarkoordinaten . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Die archimedische Spirale</b>	<b>3</b>
3.1	Allgemeine Definition . . . . .	3
3.2	Kinematische Konstruktion einer Spirale . . . . .	4
3.3	Die Tangente an die archimedische Spirale . . . . .	5
3.4	Bogenlänge einer Spirale . . . . .	6
3.4.1	Näherung der Bogenlänge . . . . .	7
3.4.2	Exakte Berechnung der Bogenlänge . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Wie dick ist Frischhaltefolie?</b>	<b>10</b>
4.1	Theoretische Herleitung der Foliendicke . . . . .	10
4.2	Praktische Durchführung . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Lösung des Problems ohne Berechnung der Spirale</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Das Leben des Archimedes</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Schluss</b>	<b>15</b>
<b>A</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>II</b>
<b>C</b>	<b>Sonstige Quellen</b>	<b>III</b>

# 1 Einleitung

„Wie dick ist Frischhaltefolie? Die archimedische Spirale“, schon das Thema dieser Facharbeit zeigt wie eng unser alltägliches Leben mit mathematischen Phänomenen verknüpft ist. Auf der einen Seite haben wir einen alltäglichen Gebrauchsgegenstand und auf der anderen Seite eine Figur, die nur durch die Mathematik beschrieben werden kann. Es ist aber wohl nicht so, dass jeder der eine Rolle Frischhaltefolie kauft dabei sofort an eine mathematische Erscheinung denkt und sich fragt wie dick dieser Gebrauchsgegenstand denn wohl ist, geschweige denn sofort daran denkt es zu berechnen. Trotzdem soll diese Arbeit verschiedene Möglichkeiten aufzeigen die Dicke von Frischhaltefolie zu berechnen. Ausgegangen werden soll dabei von den Angaben, die die Hersteller dem Kunden beim Kauf von Frischhaltefolie mitliefern. Das ist zum einen die Angabe über die Länge der aufgewickelten Folie und zum anderen sind es die messbaren Größen wie der Radius der aufgewickelten Folie und der Radius der Papprolle, auf der die Folie aufgewickelt ist.

Ziel dieser Arbeit soll es also sein einen direkten Zusammenhang zwischen der Foliendicke und den bekannten Größen wie Länge und Radius herzustellen.

In *Kapitel 2* wird eine Einführung in das Polarkoordinatensystem gegeben. Es ist die Grundvoraussetzung für die Betrachtung von archimedischen Spiralen und stellt zugleich etwas neues neben dem bisher bekannten kartesischen Koordinatensystem dar.

In *Kapitel 3* wird die archimedische Spirale ausführlich behandelt und außerdem wird schon auf die Berechnung der Foliendicke hingearbeitet.

*Kapitel 4* behandelt die Berechnung der Foliendicke über die in *Kapitel 2* und *3* hergeleiteten Formeln.

*Kapitel 5* soll noch einmal eine etwas andere Möglichkeit der Berechnung vorstellen.

In *Kapitel 6* wird der Namensgeber der archimedischen Spirale näher vorgestellt, der allerdings, wie man sehen wird, nicht soviel mit der archimedischen Spirale selbst zu tun hat, aber doch Voraussetzungen für die Geometrie und für die Infinitesimalrechnung geschaffen hat, die bei dieser Arbeit eine Rolle spielen.

## 2 Polarkoordinaten

### 2.1 Allgemeine Definition

Bei der bisherigen Betrachtung von geometrischen Figuren oder Funktionen hat man diese meistens im kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Im kartesischen Koordinatensystem wird ein Punkt bezüglich seiner Verschiebung in Richtung der  $x$ -

und  $y$ -Achse vom Ursprung aus abgetragen. Das heißt die Koordinaten eines Punktes sind über die beiden Längen der Parameter  $x$  und  $y$  bezüglich des Ursprunges bestimmt. Somit lassen sich geometrische Vorgänge, wie eine Verschiebung eines Punktes in eine bestimmte Richtung recht einfach durch die Veränderung der Parameter  $x$  und  $y$  durchführen.

Betrachtet man aber nun eine Spiegelung oder eine Drehung eines Punktes  $P$ , so lassen sich die geometrischen Vorgänge viel leichter durch die Parameter  $r$  und  $\varphi$  beschreiben.  $r$  ist hierbei der Abstand zwischen einem Punkt  $P$  auf einer Ursprungsgeraden und dem Ursprung  $O$ . Der zweite Parameter  $\varphi$  bezeichnet den Winkel zwischen der Geraden  $\overline{OP}$  und der Polarachse, einem festgelegten, durch den Ursprung gehenden Strahl. Der Ursprung  $O$  wird im Polarkoordinatensystem auch als Pol bezeichnet.

## 2.2 Vom kartesischen Koordinatensystem zu den Polarkoordinaten

Im folgenden Abschnitt soll erklärt werden, wie man von den kartesischen Koordinaten auf die Polarkoordinaten schließen kann. In *Abbildung 1* kann man erkennen,

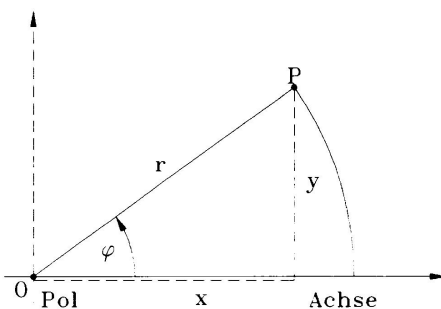


Abbildung 1: Punkte im Polarkoordinatensystem

dass sich der Parameter  $r$  aus den bekannten Größen  $x$  und  $y$  aus dem kartesischen Koordinatensystem mit dem pythagoräischen Lehrsatz berechnen lässt.  $r$  ist somit:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Für  $x$  und  $y$  ergibt sich:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

und

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

Für den Winkel  $\varphi$  ergibt sich:

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Das Problem an dieser Stelle ist, dass für den Fall  $x = 0$  der Winkel  $\varphi$  auch gleich null wäre. Dieses Problem lässt sich lösen, indem man

$$\varphi = 90^\circ \left( \frac{\pi}{2} \right) \text{ für } x = 0 \text{ und } y > 0$$

$$\varphi = 0^\circ (0) \text{ für } x = 0 \text{ und } y = 0$$

$$\varphi = 270^\circ \left( \frac{3\pi}{2} \right) \text{ für } x = 0 \text{ und } y < 0$$

setzt.

Für den Fall  $y = 0$  ist der Winkel  $\varphi$  entweder  $0^\circ (0)$  oder  $180^\circ (\pi)$ .

Das zweite Problem ist, dass für zum Beispiel zwei Punkte  $P_1 (4|5)$  und  $P_2 (-4|-5)$  die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  nicht unterscheidbar sind, da beide Winkel in diesem Fall  $\varphi_{12} \approx 51,34^\circ$  ergeben. Man kann  $\varphi$  aber auch über den Kosinus und Sinus berechnen, indem man  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  in  $x = r \cdot \cos \varphi$  und  $y = r \cdot \sin \varphi$  einsetzt. Somit ergibt sich:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \text{ bzw. } \varphi = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \text{ bzw. } \varphi = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(vgl. [4] S.19 f.)

## 3 Die archimedische Spirale

### 3.1 Allgemeine Definition

Als Spirale bezeichnet man allgemein eine Bahn, die in immer größer werdenden Windungen ein bestimmtes Zentrum umläuft. Die archimedische Spirale hat die Eigenschaft, dass die Abstände zwischen jeder einzelnen Windung konstant sind, was im folgenden Kapitel näher erläutert und bewiesen wird.

### 3.2 Kinematische Konstruktion einer Spirale

Man stelle sich eine kreisrunde Scheibe mit einem Mittelpunkt vor, den wir an dieser Stelle schon in Anlehnung an die Polarkoordinaten Pol  $O$  nennen wollen. Im Pol  $O$

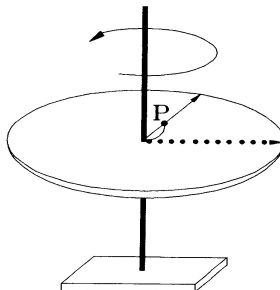


Abbildung 2: Konstruktion einer Spirale

startet eine Schnecke zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v_0$ . Es gilt daher die Weg-Zeit-Funktion:

$$r(t) = v_0 \cdot t$$

Die Schnecke bewegt sich entlang der Polarachse geradlinig auf ein fernes Ziel zu. Die Scheibe beginnt ebenfalls zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  an sich zu drehen.

Die Winkelgeschwindigkeit beschreibt die Änderung des Winkels  $\varphi$ , der von einem Strahl in einer bestimmten Zeit  $t$  überstrichen wird. Somit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  der Quotient aus dem Winkel  $\Delta\varphi$  und der Zeit  $\Delta t$  als:

$$\omega_0 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad ^1$$

$T$  ist hierbei die Zeit, die für einen vollständigen Umlauf auf einer Kreisbahn benötigt wird,  $2\pi$  ist der Winkel, der während eines vollständigen Umlaufs überstrichen wird, angegeben im Bogenmaß. Es gilt dann die Winkel-Zeit-Funktion:

$$\varphi(t) = \omega_0 \cdot t$$

Die Spur, die die Schnecke während ihres Laufs auf der Scheibe hinter sich lässt, konstruiert dabei eine archimedische Spirale.

Eliminiert man aus der Weg-Zeit-Funktion und Winkel-Zeit-Funktion die Zeit  $t$  so erhält man:

---

<sup>1</sup>aus [3] S.7

$$\frac{r}{v_0} = \frac{\varphi}{\omega_0} \quad , \quad \text{bzw.} \quad \frac{r}{\varphi} = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Somit ergibt sich für  $r$ :

$$r = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \varphi$$

Da die beiden Bewegungen mit konstanten Geschwindigkeiten ablaufen kann man den Quotienten  $\frac{v_0}{\omega_0}$  durch den konstanten Faktor  $a$  für  $\frac{v_0}{\omega_0} \neq 0$  ersetzen. Man erhält somit die allgemeine Gleichung für eine archimedische Spirale:

$$r(\varphi) = a \cdot \varphi \tag{3}$$

Das bedeutet, dass der Radius der Spirale linear mit dem Drehwinkel wächst. Da  $\frac{r}{\varphi} = \frac{v_0}{\omega_0}$  gilt, kann man für genau einen Umlauf die Spiralgleichung auch als

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{2\pi} \cdot \varphi \tag{4}$$

schreiben.  $r_0$  ist hierbei der Radius, der nach dem ersten Umlauf ( $2\pi$ ) erreicht wurde.

Möchte man die allgemeine Gleichung der archimedischen Spirale  $r = a\varphi$  nun funktional darstellen schreibt man auch:

$$f(\varphi) = a \cdot \varphi$$

(vgl. [5] S.72 ff.)

### 3.3 Die Tangente an die archimedische Spirale

Die Lage der Tangente soll in diesem Kapitel auf Grundlage des vorherigen Kapitels, sprich auf Grundlage der beiden gleichzeitig ablaufenden Bewegungen erfolgen. Die Richtung der Geschwindigkeitskomponente  $v$ , die die Richtung der Tangente hat, lässt sich, da sich zwei Bewegungen überlagern, sehr gut vektoriell ausdrücken. Zum einen haben wir die konstante Geschwindigkeit  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{\parallel}(t)$  der Schnecke auf der Drehscheibe in radialer Richtung und zum zweiten haben wir die Kreisbewegung der Drehscheibe, wobei sich der Richtungsvektor der Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}_{\perp}(t)$  des Kreises in jedem Punkt als Senkrechte auf den Richtungsvektor der Geschwindigkeit  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{\parallel}(t)$  ergibt. Der resultierende Vektor von  $\vec{v}_{\parallel}(t)$  und  $\vec{v}_{\perp}(t)$  ergibt sich dann wie in *Abbildung 3* zu sehen als Betrag:

$$v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}$$

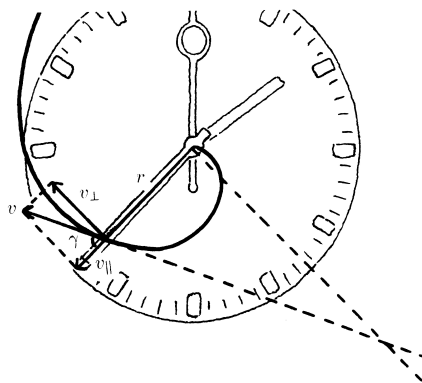


Abbildung 3: Die Tangente an der Spirale

Da  $v_{\perp}^2 = \omega_0^2 r^2$ <sup>2</sup> gilt, kann man  $v$  auch als

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 r^2} = v_0 \sqrt{1 + (\omega_0 t)^2}, \text{ für } t = \frac{r(t)}{v_0}$$

schreiben.

Für den Winkel  $\gamma$  zwischen dem Radius  $r$  und  $\vec{v}$  ergibt sich dann wie in *Abbildung 3* zu sehen:

$$\tan \gamma = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{\omega_0}{v_0} r = \omega_0 t = \varphi$$

Dieses Ergebnis kann man nun noch erweitern, indem man sagt, dass  $\varphi = \frac{a\varphi}{a}$  ist.  $a\varphi$  ist gleich  $r$  oder  $f(\varphi)$ .  $a$  ist auch die erste Ableitung von  $f(\varphi)$ , sodass gilt:

$$\tan \gamma = \frac{a\varphi}{a} = \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)} = \varphi$$

Für den Winkel  $\gamma$  zwischen der Tangente an die Spirale und dem Strahl  $r$  ergibt sich also:

$$\gamma = \tan^{-1} \varphi$$

(vgl. [5] S. 74 f. und [2] S. 215)

### 3.4 Bogenlänge einer Spirale

Im folgenden Kapitel soll die Bogenlänge der Spirale zunächst nur näherungsweise und anschließend genauer berechnet werden, um später den Zusammenhang zwischen der Länge und der Dicke der Frischhaltefolie herzustellen.

---

<sup>2</sup>aus [3] S. 7

### 3.4.1 Näherung der Bogenlänge

Bei der näherungsweise Rektifikation, das heißt bei der Bestimmung der Bogenlänge, stelle man sich zunächst ein radiales Strahlensystem vor, in dem in gleichen Abständen Radien eingezeichnet sind, wie es in *Abbildung 4* links zu sehen ist.

Durch die Strahlen sind die einzelnen Radien jeweils in  $n$  gleich große Teile auf-

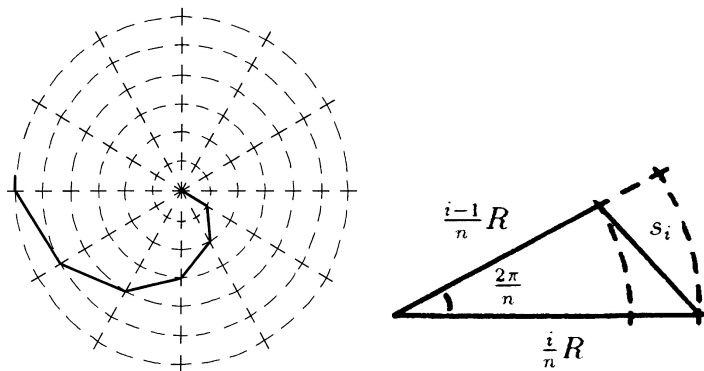


Abbildung 4: Bogenlänge einer Spirale

geteilt. Die Winkeldifferenz zwischen jeweils zwei Strahlen beträgt damit  $\frac{2\pi}{n}$ . Die Spirale wird nun konstruiert, indem Sekantenstücke der einzelnen Radien wie in der Abbildung oben verbunden werden. Sie bilden den sogenannten Polygonzug. Dieser Polygonzug ist nicht so lang, wie die reale Bogenlänge einer Spirale der Form  $r = a \cdot \varphi$ , aber je höher die Anzahl  $n$  der Unterteilungen ist, desto genauer nähert sich der Polygonzug der Bogenlänge einer Spirale an. Der Einfachheit halber wird hier zunächst nur ein Umlauf der Spirale beschaut.

Das Sekantenstück bildet nun durch die Schnittpunkte zweier Strahlen mit jeweils zwei aufeinanderfolgenden Radien und den zwei Radien selbst ein allgemeines Dreieck, wie in *Abbildung 4* rechts zu sehen ist. Für das allgemeine Dreieck gilt der Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Auf das gezeigte Dreieck übertragen bedeutet das:

$$s_{n,i}^2 = \left(\frac{i-1}{n}R\right)^2 + \left(\frac{i}{n}R\right)^2 - 2\left(\frac{i-1}{n}R\right)\left(\frac{i}{n}R\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$R$  ist hierbei der größte Radius, der nach einem Umlauf erreicht wird,  $i$  die Anzahl der Strecken, die sich zum Polygonzug zusammensetzen. Wenn das Sekantenstück die eine Seite des Dreiecks bildet und der Pol  $O$  ebenfalls ein Punkt des Dreiecks ist, so ergibt sich für irgendeinen Radius  $r$  bis zur  $i$ -ten Strecke  $s_i$  die Länge  $\frac{i}{n}R$ .

Für die andere Seite des Dreiecks, die durch den Schnittpunkt des Sekantenstücks mit dem Radius begrenzt ist, der dem Radius der  $i$ -ten Strecke vorausgegangen ist, ergibt sich dann die Länge entsprechend als  $\frac{i-1}{n}R$ .

Für die Bogenlänge der ersten Windung einer Spirale folgt damit:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} R \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{i}{n}\right)^2 - 2\frac{(i-1)i}{n^2} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \quad (5)$$

Dieser Grenzwert lässt sich allerdings nicht ohne weiteres bestimmen, deswegen wird im folgenden Kapitel eine genaue Bestimmung der Bogenlänge einer Spirale angestrebt.

Da diese Formel außerdem nur für den Radius  $R$  gilt, das heißt nur für den Radius vom Pol  $O$  bis zu dem Bahnpunkt, der nach genau einem Umlauf ( $2\pi$ ) erreicht wird, ist sie für die Berechnung der Dicke der Frischhaltefolie nicht sonderlich geeignet, denn da Frischhaltefolie auf einer Papprolle aufgewickelt ist, beginnt ihre Bahn nicht im Pol  $O$ , sondern erst nach einem bestimmten Radius  $r$ .

Daraus folgt auch, dass die allgemeine Gleichung für die „Frischhaltefolien-Spirale“

$$r = a \cdot \varphi + r_I$$

heißt muß, wobei  $r_I$  der Abstand vom Pol  $O$  bis zum Anfangspunkt der Spiralbahn ist. Auf die Frischhaltefolie übertragen bedeutet das:  $r_I$  ist der Radius der Papprolle. (vgl. [5] S.89 f.)

### 3.4.2 Exakte Berechnung der Bogenlänge

Bei der exakten Rektifikation gestaltet sich hingegen der Ansatz für die Berechnung der Bogenlänge etwas schwieriger, als im vorangegangenen Beispiel. Allgemein gilt

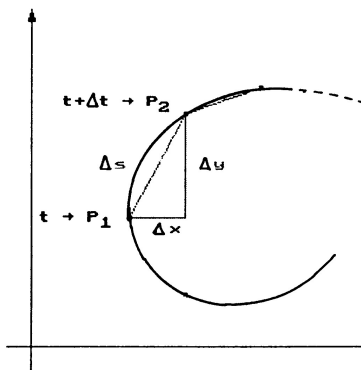


Abbildung 5: Bogenlänge einer Kurve

für die Wegstrecke  $\Delta s$  auf einer Kurve für sehr kleine  $\Delta s$ , wie aus *Abbildung 5* zu entnehmen:

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Differentiell gilt dann:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Ist die Kurve durch die Funktion  $f$  definiert und gelten für zwei Punkte, die  $\Delta s$  begrenzen, die Parameterwerte  $t$  und  $t + \Delta t$  so gilt:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}$$

, wobei  $f_1$  und  $f_2$  die Koordinatenfunktionen der Punkte sind, die  $\Delta s$  begrenzen.

Da  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  gilt, ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Da diese Darstellung im kartesischen Koordinatensystem vorhanden ist, müssen wir sie noch in das Polarkoordinatensystem übertragen.

Dazu setzen wir in obige Gleichung nun Gleichung (1) und (2) ein und erhalten damit:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{dx}{d\varphi} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi\right)^2}{\left(\frac{dx}{d\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + r^2}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2}}$$

Da man  $s$  nach  $\varphi$  und nicht nach  $x$  differenzieren möchte, kann man jetzt sagen, dass

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi}$$

ist, und deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \\ s &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

Da  $r = a \cdot \varphi$  und  $r' = a$  ist, gilt für die Bogenlänge einer archimedischen Spirale:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{a^2 \cdot \varphi^2 + a^2} d\varphi$$

$$s = a \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi \quad (7)$$

$$s = a \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right]_{\varphi_0}^{\varphi_1} \quad (8)$$

(vgl. [4] S. 34 ff. und [2] S.172 f.)

## 4 Wie dick ist Frischhaltefolie?

Nachdem nun durch die Herleitung der notwendigen Größen für die Berechnung der Dicke der Frischhaltefolie ein Großteil der Vorarbeit geleistet ist, stellt sich für mich an dieser Stelle ein neues Problem.

Denn wie schon in *Kapitel 3.4.1* gesagt eignet sich Gleichung (5) nicht für die Berechnung der Dicke über die Bogenlänge der Spirale, zumal diese nur näherungsweise wäre. Außerdem befinden sich in Gleichung (8) zwei Unbekannte, nämlich  $a$  und  $\varphi$ .  $\varphi$  kennen wir nicht, da der Hersteller von Frischhaltefolien auf der Verpackung nicht bekanntgibt wieviel Windungen die Folie um die Papprolle macht. Die einzige Angabe, die wir vom Hersteller geliefert bekommen ist die Länge der Frischhaltefolie, was im mathematischen Sinne der Bogenlänge der Spirale entspricht. Zudem haben wir noch zwei messbare Größen, nämlich den Radius der Papprolle und den Radius der aufgewickelten Folie, welche sich mit einem Messschieber recht genau bestimmen lassen.

### 4.1 Theoretische Herleitung der Foliendicke

Aus *Kapitel 3.4.2* wissen wir, für die Bogenlänge  $s$  gilt:

$$s = a \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = a \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right]_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

Da wir die Spirale vom Anfangs- bis zum Endpunkt betrachten ist  $\varphi_0 = 0$ . Daher gilt:

$$a \left[ \frac{\varphi_1}{2} \sqrt{1 + \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2} \right) \right] - \underbrace{\left[ \frac{\varphi_0}{2} \sqrt{1 + \varphi_0^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \varphi_0 + \sqrt{1 + \varphi_0^2} \right) \right]}_0 \stackrel{s}{=} \left[ \frac{\varphi_1}{2} \sqrt{1 + \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2} \right) \right]$$

$$s = a \left[ \frac{\varphi_1}{2} \sqrt{1 + \varphi_1^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2} \right) \right] \quad (9)$$

Um einen Zusammenhang zwischen der Foliendicke  $t$  und der Anzahl der Windungen  $n$  herstellen zu können stelle man sich zunächst die Folie nicht als Spirale aufgewickelt vor, sondern jede Windung einzeln als Kreisbahn um die Papprolle. Für die Länge der ersten Kreisbahn gilt dann:

$$U_1 = 2\pi \cdot (r_I + t)$$

wobei  $r_I$  der Radius der innersten Bahn ist. Für die zweite Kreisbahn gilt dann:

$$U_2 = 2\pi \cdot (r_I + 2t)$$

usw.

Für die letzte und  $n$ -te Wicklung gilt:

$$U_n = 2\pi \cdot (r_I + n \cdot t)$$

Da für die letzte Wicklung auch

$$U_n = 2\pi r_A$$

gilt, wenn  $r_a$  der äußere Radius ist, erhält man nach gleichsetzen für  $t$  und  $n$ :

$$\begin{aligned} t &= \frac{r_A - r_I}{n} \\ n &= \frac{r_A - r_I}{t} \end{aligned} \quad (10)$$

Die Unbekannte  $\varphi_1$  in Gleichung (9) lässt sich berechnen, indem man die Anzahl der Windungen  $n$  mit  $2\pi$  multipliziert. Nach Einsetzen von Gleichung (10) ergibt sich dann:

$$\varphi_1 = 2\pi \cdot n = \frac{2\pi \cdot (r_A - r_I)}{t}$$

$\varphi_1$  können wir nun in Gleichung (9) einsetzen und erhalten mit  $a = \frac{t}{2\pi}$  für die Bogenlänge:

$$s = \frac{t}{2\pi} \cdot \left[ \frac{2\pi(r_A - r_I)}{t} \sqrt{1 + \left( \frac{2\pi(r_A - r_I)}{t} \right)^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{2\pi(r_A - r_I)}{t} + \sqrt{1 + \left( \frac{2\pi(r_A - r_I)}{t} \right)^2} \right) \right]$$

(vgl. [6] S.20 ff.)

## 4.2 Praktische Durchführung

Das Problem besteht jetzt darin obige Gleichung nach  $t$  aufzulösen um die Dicke der Folie zu bestimmen. Nach mehreren vergeblichen Versuchen die Gleichung mittels eines CAS-Programms nach  $t$  aufzulösen habe ich mit dem GTR ein Programm geschrieben, dass für die Berechnung der Bogenlänge mit obiger Gleichung geeignet ist. Den Quelltext kann man *Abbildung 7* entnehmen.  $r_A$  und  $r_I$  sind feste Größen,

```
PROGRAM:FACHARBE
:Prompt T
:Prompt A
:Prompt I
:(T/(2*π))*((2π
*(A-I))/(T))*√(1
+(2π*(A-I))/(T)
)^2)+0.5*ln(((2π*
(A-I))/(T))+√(1+
((2π*(A-I))/(T)
)^2)))→S
:Anz. S
```

Abbildung 6: Programm-Quelltext

die im Programm einfach nur mit  $A$  und  $I$  bezeichnet sind.

Mit Hilfe eines Messschiebers habe ich den Radius der Folienwicklung und der Paprolle bestimmt. Es ergaben sich folgende Werte:

$$l = 50 \text{ m} = 5000 \text{ cm}$$

$$r_I = 1,545 \text{ cm}$$

$$r_A = 2,195 \text{ cm}$$

Mit dem genannten Programm habe ich nun so lange Werte für  $t$  eingegeben bis ich ungefähr auf die vorgegebene Bogenlänge von  $5000 \text{ cm}$  kam. Für den Wert

$$t = 0,000530929 \text{ cm}$$

erhielt ich eine Bogenlänge  $s \approx 5000,002 \text{ cm}$ . Die Dicke von Frischhaltefolie beträgt also laut diesem Berechnungsverfahren  $0,000530929 \text{ cm}$ .

## 5 Lösung des Problems ohne Berechnung der Spirale

Im folgenden Abschnitt soll die Dicke der Frischhaltefolie über die Fläche berechnet werden.

Beschaut man sich die Rolle einer Frischhaltefolie von der Seite, so erkennt man, dass die vielen Schichten der aufgewickelten Folie eine Fläche bilden. Diese Fläche, die man dort sieht, ergibt sich auch wenn man die Folie abwickelt und dann die Kante derselben von der Seite betrachtet.

Aufgewickelt bildet die Folie einen Kreisring, dessen Fläche sich als

$$A = \pi r_A^2 - \pi r_I^2 = \pi (r_A^2 - r_I^2)$$

berechnen lässt.  $r_A$  ist hierbei der Radius vom Mittelpunkt der Rolle bis zur äußeren Kante der Folienwicklung,  $r_I$  ist der Radius der Papprolle, auf der die Folie aufgewickelt ist.

Für die abgewickelte Folie gilt die Flächenformel

$$A = b \cdot l$$

,wenn  $b$  die Dicke und  $l$  die Länge der Folie ist. Daraus ergibt sich also für die Foliendicke nach gleichsetzen:

$$b \approx \frac{\pi(r_A^2 - r_I^2)}{l}$$

In meinem Fall hat die Frischhaltefolie die in *Kapitel 4.2* angegebenen Maße:

$$b \approx \frac{\pi(2,195^2 \text{ cm}^2 - 1,545^2 \text{ cm}^2)}{5000 \text{ cm}} \approx 0,0015274 \text{ cm}$$

Die Frischhaltefolie hat also eine Dicke von ungefähr  $0,0015274 \text{ cm}$ .  
(vgl. [5] S. 106 f.)

## 6 Das Leben des Archimedes

ARCHIMEDES wurde 287 v. Chr. in Syrakus, einer griechischen Hafenstadt und Kolonie, auf Sizilien geboren. Er war Mathematiker und Physiker und machte einige weitreichende Entdeckungen in den Bereichen der Geometrie, Stereometrie, Arithmetik

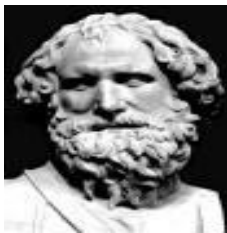


Abbildung 7: Archimedes

und Mechanik. Sein Vater war Phidias, ein Astronom in Syrakus, wo ARCHIMEDES die meiste Zeit seines Lebens verbrachte, der gute Kontakte zum damaligen sizilianischen König Hieron II hielt. ARCHIMEDES studierte einige Jahre in der ägyptischen Stadt Alexandria, wo Euklid<sup>3</sup> eine Akademie gegründet hatte. Später in Syrakus pflegte auch ARCHIMEDES gute Kontakte zu König Hieron II und dessen Sohn Gelon.

Bekannt ist ARCHIMEDES für das sogenannte Archimedische Prinzip, das er angeblich eher durch Zufall entdeckt hat. Und zwar soll der König einem Goldschmied den Auftrag gegeben haben ihm eine neue Goldkrone zu fertigen. Der König allerdings traute dem Schmied nicht, da er dachte er hätte nicht ausschließlich Gold für die Krone verwendet. So gab er ARCHIMEDES den Auftrag die Krone bezüglich ihrer Reinheit zu prüfen ohne sie dabei zu zerstören. Der entscheidende Geistesblitz soll ARCHIMEDES dabei eher zufällig getroffen haben als er sich in eine bis zum Rand gefüllte Badewanne gesetzt hat, die daraufhin überlief. Die Erkenntnis, die er daraus zog war, dass er über die Masse und das Volumen des verdrängten Wassers die Dichte eines bestimmten Körpers berechnen konnte. ARCHIMEDES hat darauf hin in einem Vergleich einmal die Krone und einen reinen Goldbarren der gleichen Masse unter Wasser getaucht. Er maß die Volumen des verdrängten Wassers der beiden Körper und stellte fest, dass die Krone mehr Wasser verdrängte, woraufhin er zu dem Schluss kam, dass die Krone nicht aus reinem Gold bestand, sondern wahrscheinlich mit Silber gestreckt wurde. Daraus leitete er das Archimedische Prinzip ab, das besagt, dass schwimmende Körper immer eine Auftriebskraft erfahren und dabei die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit gleich derjenigen des Körpers ist.

ARCHIMEDES erfand zudem eine Möglichkeit die Zahl  $\pi$  näherungsweise zu berechnen, welche noch bis ins 17. Jahrhundert von Mathematikern verwendet wurde. Außerdem konnte er die eingeschlossenen Flächen von Parabeln oder Ellipsen bestimmen, was die Voraussetzung für die heute bekannte Infinitesimalrechnung ist. Im Bereich der Mechanik erfand er die Hebel-Gesetze, worauf sein berühmter Ausspruch „Man gebe mir einen festen Punkt und ich werde die Welt aus den Angeln

---

<sup>3</sup>griechischer Mathematiker, 365-300 v. Chr.

heben“ gründet.

ARCHIMEDES soll angeblich auch dabei geholfen haben Kriegsgeräte für die Griechen zu entwickeln. So hatten die Griechen zum Beispiel Schleudermaschinen, mit denen große Steine katapultiert werden konnten. Außerdem hat ARCHIMEDES angeblich auch die Hohlspiegel erfunden mit denen Licht gebündelt werden konnte, mit dem man die Schiffe der Römer in Brand setzen konnte. Beides diente der Verteidigung seiner Heimatstadt bei dem Angriff der Römer.

ARCHIMEDES soll bei einem solchen Angriff von Römern umgebracht worden sein, als er gerade dabei war Figuren in den Sand zu zeichnen. Der Legende nach soll er beim Anrücken der Römer mit dem Satz reagiert haben: „Störe mir meine Kreise nicht!“

ARCHIMEDES starb im Jahre 212 v. Chr. in seinem Geburtsort Syrakus.

(vgl. [7], [8] und [9])

## 7 Schluss

Zum Abschluss möchte ich noch einmal die gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen und beurteilen.

In dieser Facharbeit sind zwei Wege zur Berechnung der Dicke von Frischhaltefolie vorgestellt worden. Und wie es zwei verschiedene Möglichkeiten der Berechnung gibt, gibt es auch zwei verschiedene Ergebnisse. Wollen wir deshalb noch einmal die Ansätze der beiden Rechnungen beleuchten.

Bei der vorgestellten Berechnungsmöglichkeit in *Kapitel 4* kann man von einer Ungenauigkeit ausgehen, da der Ansatz die Wicklungen der Frischhaltefolie zunächst als einzelne Kreisbahnen um die Papprolle zu betrachten nicht den genauen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Wicklungen und der Länge der Folie und damit auch der Dicke der Folie wiedergibt.

Insofern muß man vielleicht sogar sagen, dass der rein geometrische Ansatz in *Kapitel 5* genauer sein könnte, da er nicht so viele Risikofaktoren beinhaltet.

Aber ob das erklärt, warum das Ergebnis von *Kapitel 4* nur ungefähr  $\frac{1}{3}$  des Ergebnisses von *Kapitel 5* ausmacht kann ich letztendlich auch nicht beantworten.

Davon abgesehen ist es mir gelungen einen direkten Zusammenhang zwischen der Foliendicke und den bekannten Größen wie Folielänge und Radius herzustellen.

# A Abbildungsverzeichnis

## Abbildungsverzeichnis

1	Aus „Polarkoordinaten“ v. G.Steinberg S.19 . . . . .	2
2	Aus „Polarkoordinaten“ v. G.Steinberg S.25 . . . . .	4
3	Aus „Spiralen“ v. Johanna Heitzer S.75 . . . . .	6
4	Aus „Spiralen“ v. Johanna Heitzer S.89/90 . . . . .	7
5	Aus „Höhere Kurven“ v. H. Schupp, H. Dabrock; abgewandelt . . . . .	8
6	Screenshot des Taschenrechners mit dem Programm „TI Connect“ erstellt . . . . .	12
7	v. <a href="http://www.shu.edu/projects/reals/history/archimed.html">http://www.shu.edu/projects/reals/history/archimed.html</a> . . . . .	14

## B Literaturverzeichnis

### Literatur

- [1] **DUDEN Grundwissen, Mathematik II**  
wissensch. Bearbeit. PROF.DR.HARALD SCHEID — Bibliographisches Institut  
& F.A. Brockhaus AG — Mannheim 1991
- [2] **Höhere Kurven**  
Hrsg. HANS SCHUPP, HEINZ DABROCK — BI Wissenschaftsverlag — Mann-  
heim, Leipzig, Wien, Zürich 1995
- [3] **Physik, Formelsammlung für die Sekundarstufe II** 2. Auflage  
Hrsg. MANFRED HARTMANN — Cloppenburg 1997
- [4] **Polarkoordinaten**  
Hrsg. GÜNTER STEINBERG — Metzler Schulbuchverlag — Hannover 1993
- [5] **Spiralen**  
Hrsg. JOHANNA HEITZER — Klett Schulbuchverlag — Leipzig 1998
- [6] **Bildungsverlag EINS** Dümmler  
Jahrg. 57 — Heft 1, 2004

## C Sonstige Quellen

- [7] Microsoft Encarta Professional 2003
- [8] <http://www.referaty.sk/tlac.php?referat=4012>
- [9] <http://www.shu.edu/projects/reals/history/archimed.html>

Diese Quellen sind als *html*- und *Word*-Dokument auf Diskette beigelegt.